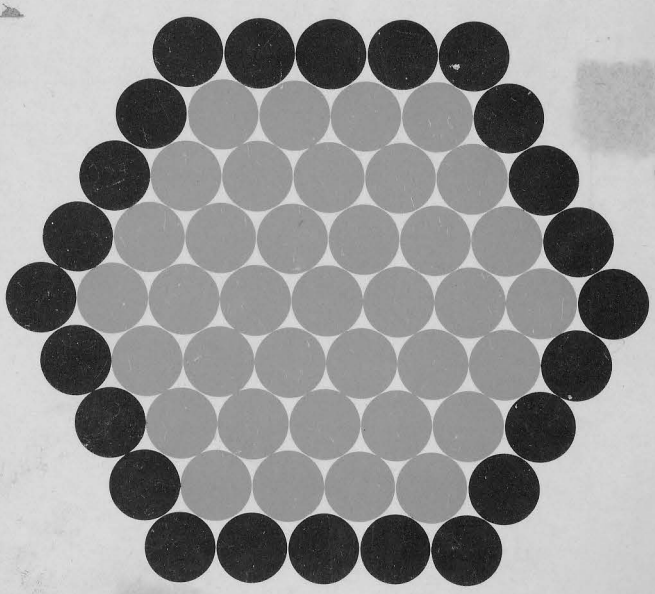
JEAN VAN HEIJENOORT

EL DESARROLLO DE LA TEORÍA DE LA CUANTIFICACIÓN



INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
CUADERNO 32

Cuaderno 32

JEAN VAN HEIJENOORT

EL DESARROLLO DE LA TEORÍA DE LA CUANTIFICACIÓN

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS
1976

Primera edición: 1976

*

© 1975, Universidad Nacional Autónoma de México

Ciudad Universitaria, México 20, D. F.
Dirección General de Publicaciones
Impreso y hecho en México

En la primavera de 1973 di una serie de conferencias en el Instituto de Investigaciones Filosóficas de la Universidad Nacional Autónoma de México, sobre el tema del desarrollo de la teoría de la cuantificación. El presente Cuaderno fue escrito con ocasión de esas conferencias y contiene lo esencial de ellas.

Agradezco a la Sra. Elsa Cecilia Frost su ayuda en la redacción final del texto castellano y a la Sra. Margarita M. Valdés su ayuda en la corrección de las pruebas.

INTRODUCCIÓN

La teoría de la cuantificación es una familia de sistemas formales, adecuados para la lógica clásica o para lógicas más débiles que la clásica. Cada uno de estos sistemas contiene un conjunto completo de conectivos oracionales; contiene dispositivos simbólicos que permiten el funcionamiento de la cuantificación existencial y universal sobre uno (lógica de una suerte) o varios (lógica de varias suertes) universos de individuos; puede contener, o no, símbolos de funciones; puede contener, o no, el predicado de identidad, con los axiomas y reglas correspondientes; no contiene ningún axioma y ninguna regla que no sean lógicos, pero tales axiomas y reglas se pueden añadir, de tal manera que obtenemos un sistema *aplicado* o una *teoría*.

Veamos de nuevo estos puntos, uno por uno. La lógica clásica estará en el centro de nuestra atención, y a veces el nombre de 'teoría de la cuantificación' se reserva únicamente para lo que aquí llamaremos la teoría clásica de la cuantificación. Pero nuestras indagaciones nos llevarán, de modo natural, a considerar también a veces la lógica intuicionista o la lógica minimal, y por eso hablaremos de la teoría intuicionista o de la teoría minimal de la cuantificación. No consideraremos, sin embargo, sistemas en los que se usan operadores modales. No hablaremos tampoco de teoría de la cuantificación al considerar distinciones de tipos. La teoría de la cuantificación, en el sentido que acabamos de presentar, se llama también lógica de primer orden.

En la lógica clásica hay, para cada $n \geqq 0$, 2^{2^n} conectivos oracionales n-arios, definidos por tablas de verdad; existen conjuntos de conectivos tales que todos los conectivos se pueden

escribir en términos de los elementos de un conjunto; se dice que tal conjunto es *completo;* ejemplos de conjuntos completos mínimos son: 1) el conjunto que contiene sólo la negación de la conjunción; 2) el conjunto que contiene sólo la negación de la disyunción (barra de Sheffer); 3) el conjunto que contiene la negación y el condicional; 4) el conjunto que contiene la negación y la disyunción, y así sucesivamente (hay en total unos treinta conjuntos completos mínimos de conectivos; para detalles y referencias véase § 24 en *Church 1956*).* En la lógica intuicionista o minimal, donde no hay tablas finitas de verdad, la situación es enteramente diferente. En la teoría clásica de la cuantificación tenemos cuantificadores existenciales y universales, o bien sólo de una clase, definiéndose la otra clase en términos de la primera y de negación; en las teorías noclásicas de la cuantificación tenemos las dos clases de cuantificadores. La lógica de varias suertes se puede reducir a la de una suerte, así pues no la consideraremos (véase *Schmidt 1951*). Por lo común tendremos símbolos de funciones en nuestros sistemas, pero consideraremos primero sistemas sin identidad y veremos después lo que trae la introducción de la identidad.

La teoría clásica de la cuantificación nació en 1879, el año en que Frege publicó su *Begriffsschrift*. En menos de noventa páginas, este librito presenta cierto número de descubrimientos que cambiaron la cara de la lógica. La hazaña central de la obra es, sin embargo, la teoría de la cuantificación. La contribución de Frege señala uno de los rompimientos más profundos que jamás se hayan presentado en el desarrollo de la ciencia. El interés por la lógica, tan vivo durante la Edad Media, se extinguió a fines del siglo XV, y los grandes pensadores de los tres siglos siguientes no se sintieron atraídos por los estudios lógicos. En 1787, Kant escribió que la lógica "está al parecer completa y perfecta". El único gran filósofo que mostró un interés profundo y constante por la lógica fue Leibniz. Pero sus investigaciones fueron más un programa que una realización. Nunca dio el paso decisivo hacia la creación de la teoría de la cuantificación, el de abandonar la descomposición aristoté-

* El nombre de un autor, seguido por el número de un año, ambos en cursivas, denota una de las referencias en la lista que se encuentra al fin del presente texto. Cuando el contexto no deja ninguna duda sobre el autor, se usa sólo el número del año.

lica de la proposición en un sujeto y un predicado; no podía, en consecuencia, enfrentarse adecuadamente a las relaciones. Después de Leibniz, los estudios lógicos fueron tomando muy lentamente cierto ímpetu, pero sólo hacia mediados del siglo XIX se hizo un progreso decisivo. George Boole propuso un cálculo que hace resaltar las analogías algebraicas entre proposiciones y clases. Pero el hecho de que uno y el mismo cálculo puede interpretarse a la vez como cálculo de proposiciones y como cálculo de clases resultó, de cierto modo, una desventaja para el desarrollo de la lógica. Augustus de Morgan investigó ciertas propiedades combinatorias de las relaciones, pero no en una dirección que pudiera llevarle a la teoría de la cuantificación.

Así la *Begriffsschrift* de Frege se destaca como un éxito mayor en la historia de la lógica. Para su definición lógica de secuencia, y por ello de número natural (cuando se introduce el 'ancestral' de una relación), Frege tuvo que admitir en su sistema la cuantificación sobre funciones, lo que equivale a salir fuera de la lógica de primer orden. Frege no dio este paso sino de mala gana. Si se omite esta parte de la *Begriffsschrift*, obtenemos la teoría clásica de la cuantificación, en una forma que no se distingue de ningún modo esencial de lo que encontramos en manuales recientes.

CAPÍTULO PRIMERO

EL MÉTODO AXIOMÁTICO

En el desarrollo de la teoría de la cuantificación, el primer período, de 1879 hasta 1929, estuvo dominado por lo que llamaremos, a falta de un mejor término, el *método axiomático.* El sentido exacto que damos aquí a estas palabras se aclarará más abajo y no se debe confundir con el sentido que tienen en otros contextos, por ejemplo, en la expresión 'el método axiomático en geometría'. Los sistemas lógicos que siguen el método axiomático, en nuestro sentido, se llaman a veces sistemas del tipo de Hilbert ('Hilbert-type systems', véase *Kleene 1952,* p. 441). Es más correcto llamarlos sistemas del tipo de Frege.

Cuando se usa el método axiomático para la teoría de la cuantificación, partimos de un número (finito o infinito) de axiomas (si el número de los axiomas es infinito, se generan por un número finito de esquemas de axiomas y podemos decidir efectivamente si una fórmula dada es un axioma o no); tenemos además reglas que nos permiten inferir, de una o varias premisas, una conclusión. Estas reglas son formales, es decir, la cuestión de saber si una inferencia es correcta está determinada por la estructura sintáctica ('tipográfica') de las fórmulas que son la (s) premisa (s) y la conclusión de la inferencia y de ninguna manera por los sentidos de estas fórmulas. La regla de separación, por ejemplo, nos permite inferir B de A y $A \supset B$; la inferencia es correcta porque la tercera fórmula está compuesta de la segunda y de la primera por medio de un cierto conectivo, el condicional. La inferencia no requiere, por lo tanto, un argumento 'lógico' que implique los sentidos de

A y *B*. Este método formal nos permite romper el regreso infinito en el que caeríamos si la lógica se basase sobre reglas que tuvieran un contenido 'lógico', que tuviese que ser justificado a su vez. Este punto ya fue subrayado por Frege (*1879*, p. 25, o *van Heijenoort 1967*, p. 28), quien, después de introducir cierto número de 'principios fundamentales del pensamiento', los transforma 'en reglas para el uso de nuestros signos', es decir, les da un carácter puramente formal.

Una vez que las reglas son formales, la noción de demostración se vuelve efectiva: confrontados con un objeto sintáctico, podemos decidir efectivamente si este objeto es una demostración de su última línea o no. Las demostraciones se pueden ordenar según su complejidad sintáctica (por orden alfabético o, usando un dispositivo subsecuente, por sus números de Gödel). Esto significa que el conjunto de las fórmulas demostrables en un sistema formal es un conjunto recursivamente enumerable.

Cuando se usa el método axiomático para la teoría de la cuantificación, la selección de los axiomas y de las reglas no tiene otro propósito que el de generar este conjunto recursivamente enumerable de teoremas, de respetar la sanidad y de obtener, si se puede, la completud. Las reglas son formales, pero no hay criterios, con excepción quizás de vagos criterios estéticos, que guían la selección de ellas. Los axiomas son fórmulas bien formadas iniciales; nuestro interés, quizás, es tener un pequeño número de ellos (o de esquemas de axiomas), pero no de ajustarlos, uno por uno, a nuestras intuiciones lógicas. Una demostración formal puede correr por meandros que nos lleven muy lejos de nuestro raciocinio intuitivo; podemos introducir en la demostración nociones extrañas a las asunciones o a la conclusión. La justificación es global: de un conjunto quizás algo extraño de axiomas obtenemos un sistema que es sano y, si se puede, completo. Históricamente, este método fue una reacción útil en contra del psicologismo que reinaba en lógica en la segunda mitad del siglo XIX y, pedagógicamente, ayuda al maestro a hacer que el alumno adquiera la noción de sistema formal.

El método, sin embargo, condujo a empresas que tenían un dudoso valor para la lógica, como la búsqueda de un axioma

único para la lógica oracional clásica. Y, lo que es más nocivo, descuidó propiedades importantes de las demostraciones, como veremos más adelante. De hecho, no se enfocó sobre ningunas propiedades internas de las demostraciones, con excepción de su carácter formal. No se preocupa tampoco de las relaciones entre las demostraciones formales y los raciocinios intuitivos; lo que le importa es recoger teoremas formales que son traducciones de proposiciones intuitivas. La comparación entre lo formal y lo intuitivo se hace al nivel de los teoremas, pero no de las demostraciones.

Históricamente, el método axiomático en lógica está conectado con una cierta concepción de la lógica que era dominante en la obra de Frege y de Russell. Hablando en abstracto, esta conexión quizás no era necesaria; pero, puesto que desempeñó un gran papel histórico en el desarrollo de la lógica, podemos adquirir un mejor entendimiento del método axiomático en lógica echando un vistazo sobre esta concepción.

Frege consideró la lógica como un cuerpo de conocimiento sistematizado que abraza todo. La lógica se funde imperceptiblemente con la aritmética y el análisis; luego, quizás con algunos símbolos y axiomas adicionales, abrazará la geometría, la física, la química. Esta concepción se presenta en el prefacio de la *Begriffsschrift*. No es una mera cuestión de proveer un lenguaje universal, sino que tenemos que edificar un sistema universal de conocimiento. Este carácter universal de la lógica se manifiesta, por ejemplo, en el hecho de que para Frege los cuantificadores se extienden sobre todos los objetos. Los precursores de Frege, Boole y De Morgan, tenían un universo de discurso que se podía cambiar a voluntad en el curso de las investigaciones. Para ellos, el universo de discurso comprende sólo lo que convenimos en considerar en cierto momento, en cierto contexto. Para Frege no puede ser cuestión de cambiar universos. No podemos ni siquiera decir que él se restrinja a un solo universo. Su universo es *el* universo. No necesariamente el universo físico, por supuesto, porque para Frege hay objetos que no son físicos. El universo de Frege consiste de todo lo que existe, y es fijo.

Una consecuencia importante de esta concepción es que nada tiene que ser, o puede ser, dicho fuera del sistema, y, de he-

cho, Frege nunca plantea ninguna cuestión metasistemática (no-contradicción, independencia de los axiomas, completud). Desde luego, Frege sabe muy bien que todo sistema formal requiere reglas que no se expresan en el sistema; pero estas reglas están desprovistas de toda lógica intuitiva; son, como hemos visto, 'reglas para el uso de nuestros signos'.

Dado que la lógica es un lenguaje, este lenguaje tiene que ser aprendido. Como muchos lenguajes en muchas circunstancias, el lenguaje tiene que ser aprendido por sugerencias y alusiones. Frege declara repetidamente, al introducir su sistema, que está dando 'sugerencias' a su lector, que el lector tiene que estar dispuesto a hacer la mitad del camino y no debe rehusarle su cuota de 'buena voluntad'. El problema es hacer que el lector 'comprenda'; él tiene que meterse en el lenguaje.

Esta concepción de la lógica está emparentada con la *logica magna* de los lógicos de la Edad Media.

En *Principia Mathematica* algunos de los aspectos de la universalidad de la lógica están modificados por la introducción de los tipos (de los cuales hay solamente un embrión en Frege). Ahora los cuantificadores se extienden sobre tipos estratificados. Pero dentro de un tipo no hay restricción a un dominio específico, y en este sentido se preserva la universalidad.

Las cuestiones sobre el sistema están tan ausentes de *Principia Mathematica* como de la obra de Frege. No se encuentran nociones semánticas. Difícilmente Russell podía poner al lado de la noción de demostrabilidad una noción de validez basada en una teoría intuitiva de los conjuntos. A principios de 1930, en su artículo sobre la completud de la teoría de la cuantificación, Gödel describe los axiomas y las reglas de *Principia Mathematica* y luego añade: *"Por supuesto,* cuando se sigue tal procedimiento, se plantea de inmediato la cuestión de saber si el sistema de los axiomas y de los principios de inferencia que se postularon inicialmente es completo, es decir, si realmente basta para la derivación de cada proposición lógico-matemática que sea verdadera o si, quizás, se pueden concebir proposiciones verdaderas (que aun pueden ser demostrables por medio de otros principios) que no se pueden derivar en el sistema considerado." (*Gödel 1930,* p. 349, o *van Heijenoort 1967,* p. 583). Gödel escribió estas líneas veinte años

después de la publicación del primer volumen de *Principia.* Si la cuestión de la completud semántica de la teoría de la cuantificación no se presentó 'de inmediato', fue por la universalidad, en el sentido que hemos tratado de desenredar, de la lógica de Russell y de Frege. El lenguaje formal universal sustituye al idioma natural, y preservar, fuera del sistema, una noción de validez basada en una teoría intuitiva de los conjuntos no parece convenir a la reconstrucción científica del lenguaje. La única cuestión de completud que se puede presentar es, usando una expresión de Herbrand, una cuestión de completud *experimental.* Se derivan en el sistema tantos teoremas como sea posible. ¿Podemos agotar los modos intuitivos de razonamiento que en efecto se usan en la ciencia? Responder a esta cuestión es el propósito de la obra de Frege y de Russell, a la cual se debe asociar, a pesar de todos sus defectos, la obra de Peano. La *Begriffsschrift, Die Grundlagen der Arithmetik,* los dos volúmenes de *Grundgesetze der Arithmetitik, Arithmetices Principia,* las varias ediciones del *Formulaire de Mathématiques, The Principles of Mathematics* y los tres volúmenes de *Principia Mathematica,* cada uno de estos trabajos puede ser considerado como un paso en el intento siempre renovado de establecer experimentalmente la completud.

En 1915 Löwenheim puso en primer plano el aspecto semántico de la teoría de la cuantificación, que Frege y Russell habían descuidado. El sistema con el que trabaja Löwenheim la mayor parte del tiempo es el cálculo de los predicados de primer orden, con identidad. No tiene axiomas o reglas de inferencia. La noción de demostrabilidad ha sido remplazada por la de validez, basada en la teoría intuitiva de los conjuntos. Löwenheim usa la noción de validez (que ya se encuentra en Schröder) sin dar una definición explícita de ella (esto lo hará mucho más tarde Tarski en *1936),* pero los usos técnicos intrincados que hace de la noción muestran que la tenía en mente con toda precisión. Con esta nueva manera de ver las cosas, pasan al primer plano las cuestiones de validez en universos diferentes. El título mismo del artículo, *Über Möglichkeiten im Relativkalkül,* se refiere a este punto: si una fórmula es válida en un universo, puede ser válida o no en algún otro universo. Se abandona la concepción de Frege y Russell de

que hay un universo fijo. Por ejemplo, con respecto al fragmento monádico, si una fórmula que contiene ocurrencias de k símbolos de predicado es válida en un universo de 2^k elementos, es válida en cualquier universo. O tomemos el famoso teorema de Löwenheim: si una fórmula de la teoría de la cuantificación es válida en un universo denumerable, es válida en cualquier universo. El método semántico trata varios casos del problema de la decisión y del problema de la reducción: de la validez de una fórmula en un universo, algún argumento nos permite concluir la validez de una fórmula conectada en el mismo universo o la validez de la misma fórmula en algún otro universo.

Estos métodos y resultados son ajenos a lo hecho por Frege y Russell en lógica. Pero, poco a poco, el método semántico encontró su lugar en la lógica. Hilbert, en sus investigaciones de los fundamentos de las matemáticas, se apropió la noción de sistema formal y la separó de las concepciones de Frege y de Russell; ya no se considera una *logica magna,* sino una multitud de sistemas formales, que se deben investigar. En esta multitud se destaca la teoría de la cuantificación o sea la lógica de primer orden, ahora completamente exenta de los tipos. La teoría de la cuantificación, con su método axiomático, fue codificada en *Hilbert y Ackerman 1928.* El libro (véase p. 68) plantea el problema de la relación entre el método axiomático y el método semántico, o sea el problema de la completud semántica de un sistema axiomático dado, pero no lo resuelve. Lo resolvió Gödel en *1930.*

CAPÍTULO SEGUNDO

HERBRAND

En 1929 Jacques Herbrand enunció un teorema que, como escribió Bernays en *1954*, es 'el teorema central de la lógica de los predicados'. El teorema de Herbrand no es sólo un resultado fundamental sobre la teoría de la cuantificación, sino que también provee un nuevo método para investigar el problema de la validez de una fórmula.

El teorema de Herbrand, enunciado en forma general, es: dada una fórmula F de la teoría de la cuantificación clásica, podemos generar efectivamente una secuencia infinita de fórmulas sin cuantificadores, F_1, F_2, ..., tal que F es demostrable en (cualquier sistema ordinario de) la teoría de la cuantificación si y sólo si hay un número k tal que F_k es (oracionalmente) válida; además, F puede recobrarse de F_k mediante la aplicación de ciertas reglas que tienen propiedades notables. Hay varias maneras de generar una secuencia adecuada de fórmulas sin cuantificadores; y, además, pueden variar muchos detalles; aquí vamos a considerar dos clases de secuencias: expansiones y disyunciones.

Consideramos un sistema Q adecuado para la teoría de la cuantificación clásica, sin identidad, en el cual los conectivos oracionales son la negación, la disyunción y la conjunción. Una fórmula de Q es *rectificada* si y sólo si no contiene ningún cuantificador vacuo, ninguna variable que tenga ocurrencias libres y ligadas en ella, y no dos cuantificadores que liguen ocurrencias de la misma variable. Un cuantificador en una fórmula rectificada es *existencialoide* si y sólo si es existencial y está dentro del alcance de un número par de símbolos de

negación, o universal y dentro del alcance de un número impar de símbolos de negación; si no, el cuantificador es *universaloide.* (Un cuantificador existencialoide se vuelve existencial en una forma prenexa de la fórmula, y un cuantificador universaloide se vuelve universal.) Una variable en una fórmula rectificada es *existencialoide* si y sólo si está ligada por un cuantificador existencialoide; es *universaloide* si y sólo si es libre o ligada por un cuantificador universaloide. (Herbrand usa *'restreint'* por 'existencialoide' y *'général'* por 'universaloide'; en inglés, en trabajos sobre Herbrand se han usado *'restricted'* y *'general'.*)

Un cuantificador es *accesible* en una fórmula F si y sólo si no está dentro del alcance de ningún cuantificador de F. Una variable es accesible en una fórmula si y sólo si es o bien libre o bien ligada por un cuantificador accesible.

Una variable es *existencialoidemente libre* en una fórmula F si y sólo si es o bien libre o bien ligada por un cuantificador que no esté dentro del alcance de ningún cuantificador existencialoide de F.

En el caso contrario, la variable es *existencialoidemente ligada.*

Supongamos que una fórmula rectificada F contenga n variables universaloides que sean existencialoidemente ligadas, $y_1, y_2, \ldots, y_n$; para $1 \leqq i \leqq n$, y_i está en el alcance de las $k(i)$ variables existencialoides $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{k(i)}}$, tomadas en el orden en el que ocurren sus cuantificadores en F $(k(i) > 0)$. Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n$ n símbolos funcionales que no ocurran en F. A y_i le asignamos el *término funcional de Herbrand* f_i $(x_{i_1} x_{i_2}, \ldots, x_{i_{k(i)}})$. (Naturalmente, F puede contener símbolos funcionales, y con éstos tenemos términos funcionales, pero no son términos funcionales de Herbrand.) La fórmula que se obtiene cuando en F se borra cada cuantificador universaloide y se remplaza cada variable universaloide que sea existencialoidemente ligada por su término funcional de Herbrand es la *forma funcional cerrada de validez* F_{cvf} de F; si en F_{cvf} se borran los cuantificadores (que son existencialoides), se obtiene la *forma funcional abierta de validez* F_{ovf} de F.

Sea $D = < t_1, t_2, \ldots, t_p >$ una secuencia finita de p términos de Q, $p \geqq 1$.

Dada una fórmula rectificada G de Q, la *expansión común* $(G, D)^*$ de G sobre D se define por las siguientes estipulaciones:

(1) Si G es atómica, $(G, D)^*$ es G;
(2) Si G es $\sim H$, $(G, D)^*$ es $\sim (H, D)^*$;
(3) Si G es $(H \vee K)$, $(G, D)^*$ es $(H, D)^* \vee (K, D)^*$;
(4) Si G es $(H \,\&\, K)$, $(G, D)^*$ es $(H, D)^* \,\&\, (K, D)^*$;
(5) Si G es $\exists x H$, $(G, D)^*$ es $(H(x/t_1), D)^* \vee (H(x/t_2), D)^* \vee \ldots \vee (H(x/t_p), D)^*$;
(6) Si G es $\forall x H$, $(G, D)^*$ es $(H(x/t_1), D)^* \,\&\, (H(x/t_2), D)^* \,\&\, \ldots \,\&\, (H(x/t_p), D)^*$.

($H(x/t_i)$ es la fórmula que se obtiene cuando en H se remplaza cada ocurrencia de x por t_i.)

(La expansión común de una fórmula es la fórmula que se considera al tratar cuestiones de validez o de satisfactibilidad en un universo finito, convirtiéndose los cuantificadores existenciales en disyunciones y los cuantificadores universales en conjunciones.)

Sea F una fórmula rectificada de Q, F_{cvf} su forma cerrada de validez. La *expansión de Herbrand* de F *sobre* D, Exp$[F, D]$, es $(F_{cvf}, D)^*$.

Teorema 1. Una fórmula F es demostrable en Q si y sólo si existe una secuencia D tal que Exp$[F, D]$ sea (oracionalmente) válida.

Prácticamente, D se puede generar como sigue:

(1)Un D_0 inicial contiene las constantes individuales y las variables universaloides que sean existencialoidemente libres de F (si F no contiene ninguna de éstas, el único elemento de D_0 es una constante individual arbitraria, u_0);

(2) D_{i+1} contiene los elementos de D_i y las instancias de los términos funcionales (que sean o no de Herbrand) de F_{cvf} que se obtienen cuando en estos términos se remplazan las variables por elementos de D_i (estas instancias están ordenadas de una manera sistemática, pero arbitraria).

El Teorema 1 se puede volver a enunciar como:

Teorema 2. Una fórmula F es demostrable en Q si y sólo si existe un número r tal que Exp$[F, D_r]$ sea (oracionalmente) válida.

Ahora consideremos las tres reglas siguientes.

Regla de cuantificación existencialoide: Pasar de $F(Qx H/H(x/t))$, donde Qx es un cuantificador existencialoide accesible de F (Q es $\forall$ o $\exists$), H es el alcance de Qx y t es un término de Q, a F.

Regla de cuantificación universaloide: Pasar de $F(QyH/H)$, donde Qy es un cuantificador universaloide accesible de F, H es el alcance de Qy y y no ocurre libre en F, a F.

Regla de simplificación: Pasar de $F(H/(H \vee H'))$, donde H es una subfórmula de F y H' un variante de H, a F.

Intentamos usar estas tres reglas para pasar de una expansión de Herbrand de F a F. Observamos, sin embargo, lo que sigue; mientras que en una aplicación de la primera regla remplazamos, en $H(x/t)$, el *término* t de Q por la variable x antes de introducir el cuantificador Qx, en una aplicación de la segunda regla la variable y, que va a estar ligada por el cuantificador Qy, ya se encuentra en H; no hay un previo remplazo de un término por una variable. Por esto, tenemos que introducir lo que llamaremos la forma variabilizada de una expansión de Herbrand. Una ocurrencia de un término en una fórmula es *máxima* si y sólo si no es una ocurrencia como un subtérmino propio de algún término funcional de Herbrand. La *forma variabilizada* $\mathrm{Exp}[F, D]_v$ de la expansión de Herbrand $\mathrm{Exp}[F, D]$ es la fórmula que se obtiene cuando, en $\mathrm{Exp}[F, D]$, cada término funcional de Herbrand, en todas sus ocurrencias máximas y sólo en éstas, se remplaza por una variable, variables diferentes remplazando términos diferentes.

(En varios lugares de nuestra presentación se plantea una cuestión de unicidad. Por ejemplo, para construir la forma funcional escogimos símbolos de funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ que no ocurrían en F: estrictamente hablando, deberíamos hablar, de 'una' forma funcional, en lugar de 'la' forma funcional, a menos que especifiquemos un procedimiento uniforme para escoger de manera única $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Por supuesto, siempre se puede hacer esto. Del mismo modo, cuando definimos la forma variabilizada, podemos imaginar que las nuevas variables que se introducen se escogen de una manera uniforme, de tal manera que se recobra la unicidad. Todo esto son detalles.)

Teorema 3. Exp[F, D]$_y$ es (oracionalmente) válida si y sólo si Exp[F, D] es (oracionalmente) válida.

Teorema 4. Dada una fórmula rectificada F, si para algún D, Exp[F, D]$_y$ es la forma variabilizada de Exp[F, D], F se puede obtener de Exp[F, D]$_y$ por aplicaciones de la regla de cuantificación existencialoide, de la regla de cuantificación universaloide y de la regla de simplificación (posiblemente con cambios alfabéticos de variables ligadas).

Si Exp[F, D]$_y$ es (oracionalmente) válida, F es válida y pasamos de la primera a la otra por aplicaciones de las tres reglas. Esto significa que podemos considerar F como demostrada en un sistema Q_H cuyos axiomas son las fórmulas de Q que no contienen cuantificadores y son (oracionalmente) válidas y cuyas reglas son las tres reglas que acabamos de enunciar. Estas reglas son reglas que tienen solamente una premisa, y tienen la propiedad de no introducir en la conclusión ningún conectivo oracional, ningún símbolo de predicado ni ningún símbolo de función que no ocurran en la premisa (esta propiedad está muy próxima de la propiedad de las subfórmulas que vamos a ver más abajo). Puesto que las reglas tienen solamente una premisa, una demostración en Q_H, una vez puesta en forma de árbol, tiene forma de bambú. La equivalencia de Q y Q_H es el teorema de Herbrand (enunciado para expansiones). Esta equivalencia es constructiva, en el sentido de que la expresión

$$\forall F \ (\vdash_Q F \leftrightarrow \vdash_{Q_H} F),$$

propiamente gödelizada, es demostrable en la aritmética primitiva-recursiva.

Tomemos un ejemplo sencillo.

Sea F la fórmula rectificada

$$\forall x \exists y \forall z [A(x,y) \text{ v } \sim A(x,z)].$$

F_{cvf} es

$$\exists y [A(x,y) \text{ v } \sim A(x,f(y))].$$

D_0 es $<x>$ y la expansión de Herbrand de F sobre D_0 es

$$A(x,x) \text{ v } \sim A(x,f(x))$$

y no es (oracionalmente) válida, D_1 *es* $<x, f(x)>$ y la expansión de Herbrand de F sobre D es

$$[A(x,x) \text{ v } \sim A(x,f(x))] \text{ v } [A(x,f(x)) \text{ v } \sim A(x,f(f(x)))]$$

y es (oracionalmente) válida. La forma variabilizada de esta última fórmula es

$$[A(x,x) \text{ v } \sim A(x,z)] \text{ v } [A(x,z) \text{ v } \sim A(x,z')].$$

Por cuantificación universaloide sobre z' obtenemos

$$[A(x,x) \text{ v } \sim A(x,z)] \text{ v } \forall z'[A(x,z) \text{ v } \sim A(x,z')].$$

Por cuantificación existencialoide sobre las ocurrencias de z en $A(x,z)$ obtenemos

$$[A(x,x) \text{ v } \sim A(x,z)] \text{ v } \exists y' \forall z'[A(x,y') \text{ v } \sim A(x,z')].$$

Por cuantificación universaloide sobre z obtenemos

$$\forall z[A(x,x) \text{ v } \sim A(x,z)] \text{ v } \exists y' \forall z'[A(x,y') \text{ v } \sim A(x,z')].$$

Por cuantificación existencialoide sobre la segunda ocurrencia de x en $A(x,x)$ obtenemos

$$\exists y \forall z[A(x,y) \text{ v } \sim A(x,z)] \text{ v } \exists y' \forall z'[A(x,y') \text{ v } \sim A(x,z')].$$

Por simplificación obtenemos

$$\exists y \forall z[A(x,y) \text{ v } \sim A(x,z)]$$

y por cuantificación universaloide sobre x obtenemos F.

Pasamos ahora a otra formulación del resultado fundamental de Herbrand, en términos de disyunciones más bien que en términos de expansiones. Sea m el número de variables existencialoides en la fórmula rectificada F de la teoría de la cuantificación. Consideramos m-tuplos de elementos tomados en la unión $\mathrm{U}_i D_i$ de las secuencias finitas D_i que introdujimos arriba. Or-

denamos estos m-tuplos en un orden arbitrario, pero sistemático, sujeto al constreñimiento de que un m-tuplo de elementos de D_i preceda a cualquier m-tuplo que contenga por lo menos un elemento de D_{i+1} que no se encuentre en D_i. Sea $<u_1^k, u_2^k, \ldots, u_m^k>$ el k-ésimo de estos m-tuplos. En F_{ovf} remplazamos cada ocurrencia de una variable existencialoide x_j (ahora libre), incluyendo las ocurrencias que están en un término funcional, por u_j^k. Esto da la fórmula F_k. La fórmula

$$F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_r$$

es la r-ésima *disyunción de Herbrand* de F.

Teorema 5. Una fórmula F de la teoría clásica de la cuantificación es válida si y sólo si existe un número r tal que la r-ésima disyunción de Herbrand de F es (oracionalmente) válida.

Para cada número r, la r-ésima disyunción de Herbrand de una fórmula F se puede transformar en la expansión de Herbrand de F sobre un D apropiado por reglas oracionales (simplificación, introducción o remoción de la doble negación, asociatividad y conmutatividad de la disyunción y de la conjunción, y distributividad de la conjunción sobre la disyunción).

En la segunda edición de *Hilbert y Bernays 1939,* en la p. 164, Bernays introduce la noción de fórmula prenexoide. Una fórmula de Q es prenexoide si y sólo si está formada de fórmulas prenexas por medio de la disyunción, la conjunción y la cuantificación (existencial y universal). Y, en la p. 166, declara que, dada una fórmula prenexoide F, se puede recobrar de la forma variabilizada de una disyunción de Herbrand de F por medio de aplicaciones de ciertas reglas que, en el caso de fórmulas prenexoides, son equivalentes a nuestras tres reglas de cuantificación existencialoide, de cuantificación universaloide y de simplificación. Pero eso es incorrecto, como se puede ver por el ejemplo que sigue, debido a W. V. O. Quine (comunicación privada). Sea F la fórmula

$$\forall x \forall y \exists z \forall w[(\sim(Gx \vee Gy) \vee Gz) \,\&\, (\sim Kw \vee Kw)] \,\&$$

$$\forall x' \forall y' \exists z' \forall w'[(\sim(Hx' \vee Hy') \vee Hz') \,\&\, (\sim Lw' \vee Lw')].$$

F contiene 2 variables existencialoides. Sea F_1 la instancia de F_{ofv} que se obtiene usando el 2-tuplo $<x, x'>$ y F_2 la instancia que se obtiene usando el 2-tuplo $<y, y'>$. La fórmula F no se puede recobrar de la forma variabilizada de la expansión de Herbrand F_1 v F_2 usando las tres reglas, a menos que se usen también algunas de las reglas oracionales que mencionamos al final del párrafo anterior.

El método de Herbrand (por medio de expansiones o de disyunciones) no es menos formal que el método axiomático: verificar, para un número dado r, que la r-ésima expansión (o disyunción) de Herbrand es (oracionalmente) válida es una operación efectiva, exactamente como verificar que una secuencia de fórmulas es una demostración de la última fórmula de la secuencia. Además, la enumeración de las fórmulas que tienen una expansión de Herbrand válida y la de las fórmulas que son demostrables en algún sistema axiomático dado tienen el mismo grado de complejidad; en ambos casos engendramos un conjunto recursivamente enumerable. Por eso, a propósito de métodos estrechamente conectados con el método de Herbrand, Quine pudo hablar de *procedimiento de demostración* ('proof procedure') (*1955*, p. 141).

Veamos otra vez las relaciones entre los tres métodos que hemos considerado hasta ahora para la teoría de la cuantificación: el método axiomático, el método semántico y el método de Herbrand. Consideremos los enunciados siguientes:

1) La fórmula F es demostrable en un sistema axiomático adecuado S;

2) F es válida;

3) Existe un número r tal que la r-ésima expansión de Herbrand de F es (oracionalmente) válida.

Que (1) implica (2) es la sanidad de S con respecto a la semántica basada en la teoría de los conjuntos y se establece sencillamente. Que (2) implica (1) es la completud de S, demostrada en *Gödel 1930*. La equivalencia de (1) y (3) fue enunciada y parcialmente demostrada (véase más abajo) por Herbrand (*1930*). Podemos mirar a (3) de dos maneras diferentes: como un sustituto de (1) o como un sustituto de (2). Herbrand mismo, bajo la influencia de las ideas formalistas de Hilbert, consideraba a (3) como un sustituto constructivista de (2); lue-

go, que (1) implica (3) es la sanidad de *S* con respecto a esta noción de 'validez constructiva', y que (3) implica (1) es su completud. Pero, si vemos ahora a (3) como un procedimiento formal de demostración que toma el lugar de (1), que (3) implica (2) es la sanidad de este procedimiento de demostración, y que (2) implica (3) es su completud. La conjunción de estas dos últimas implicaciones es lo que se llama a veces el teorema 'semántico' de Herbrand, y se establece mucho más sencillamente que la equivalencia de (1) y (3).

El teorema de Herbrand, en una transposición literal, no se aplica a la teoría intuicionista de la cuantificación, como puede verse con el ejemplo de la fórmula

$$\forall x \forall y(Fax \vee Fby) \supset \exists z \forall u Fzu.$$

Existe una versión intuicionista del teorema de Herbrand con respecto al caso especial de las fórmulas prenexas, conjunciones, disyunciones y negaciones de ellas (*Kreisel 1958*, pp. 328-329). Se han hecho esfuerzos por obtener un análogo del teorema de Herbrand para fórmulas arbitrarias de la teoría intuicionista de la cuantificación, pero no se han obtenido resultados sencillos (véase *van Heijenoort 1971*).

El teorema de Herbrand se puede extender fácilmente a la teoría clásica de la cuantificación con identidad. Hemos observado que el sistema Q_H tiene reglas de una premisa. Herbrand señaló que la regla de separación, que tiene dos premisas, ya no es siempre dispensable tan pronto como hay axiomas no-lógicos (*Herbrand 1930*, p. 117; *1968*, p. 143; *1971*, p. 175). Kreisel estableció que no hay teorema de Herbrand para la aritmética de primer orden (*Kreisel 1952*, p. 114). Sin embargo consideraciones basadas en el teorema de Herbrand han permitido simplificar y extender la demostración de no-contradicción que Ackermann dio para la aritmética de primer orden (véase *Dreben y Denton 1968* y *Scanlon 1973*).

En 1939 Bernays escribió que la demostración que da Herbrand de su teorema fundamental es 'difícil de seguir' (*Hilbert y Bernays 1939*, p. 158, nota 1), sin decir que sea errónea. En 1943, Gödel llegó a la conclusión que hay una laguna en el argumento de Herbrand y escribió sobre este punto una nota para

su uso personal, pero no publicó nada. En 1963 Dreben, Andrews y Aanderaa publicaron *(1963, 1963a)* contraejemplos que refutan lemas sobre los que reposa la demostración de Herbrand. Desde entonces la demostración de Herbrand ha sido arreglada *(Dreben y Denton 1966).*

Véamos cuál es el error de Herbrand. Diremos que una fórmula F es de orden p si y sólo si p es el número más pequeño tal que Exp[F, D_p] es válida. Herbrand pensó que las reglas de prenexización, es decir, las reglas que nos permiten pasar de una fórmula a una de sus formas prenexas, preservan el orden de una fórmula, e intentó demostrarlo. Lo que ocurre en realidad es que ciertas aplicaciones de ciertas reglas de prenexización aumentan el orden.

En la demostración de la parte 'sólo si' del Teorema 2 de arriba, verificamos, primero, que para cada axioma A de Q existe un número r tal que Exp[A, D_r] es válida; luego tenemos que establecer, para cada regla de Q, que para algún número s la conclusión de la regla es de orden s, bajo la asunción de que la premisa o las premisas de la regla son de ciertos órdenes dados. Por ejemplo, para la regla de separación suponemos que la fórmula G es de orden p, la fórmula $G \supset H$ de orden q, y tratamos de encontrar una cota superior para el orden s de H. Herbrand pensó erróneamente que max (p, q) era tal cota superior. Sean j el número de cuantificadores de G y k el número de cuantificadores de H. Dreben y Aanderaa *(1964)* establecen, dando contraejemplos, que una cota superior para el orden de H no puede ser dada por una función de p y q, por una función de j, p y q, o por una función de k, p y q; ellos presentan una función primitiva-recursiva de los cuatro argumentos, j, k, p y q, que da una cota superior. Llamaron a esta función una *función analizadora* ('analysing function') de la regla de separación. Para cada regla del sistema Q hay por lo menos una función analizadora que es primitiva-recursiva. Por esto, dada una demostración de una fórmula F en Q, podemos determinar siguiendo la demostración paso a paso, un número p tal que Exp[F, D_p] sea válida, y la determinación de p desde (el número de Gödel de) la demostración es primitiva-recursiva. Si empezamos con la fórmula F, sin usar ninguna demostración de F, podemos encontrar, construyendo expansiones sucesivas, un

número q tal que Exp[F, D_q] sea válida; pero la determinación de q desde F es recursiva, no primitiva-recursiva.

En las investigaciones que le llevaron a su teorema, Herbrand se inspiró, según lo reconoce, en un argumento empleado por Löwenheim en la demostración de su famoso teorema. En la demostración de Löwenheim el argumento es sólo un dispositivo técnico, pero Herbrand reveló toda su importancia. Dada una fórmula prenexa, el argumento consiste en generar, en un orden bien determinado, constantes individuales que, por sustitución, dan una secuencia de instancias de la matriz de la fórmula. Si la fórmula dada es satisfactible, cada una de estas instancias es satisfactible, y a partir de allí se puede construir un dominio numerable (es la unión de los dominios D_i considerados arriba) en el cual la fórmula dada sea satisfactible. De aquí saca Löwenheim su teorema. La conexión con el método de Herbrand es obvia.

En *1928* Skolem presenta una versión axiomática de la teoría de la cuantificación y luego añade: "No entro en esto más profundamente, puesto que creo que los problemas de la deducción se pueden tratar de otra manera, más conveniente." La manera "más conveniente" que propone Skolem consiste en generar la secuencia de instancias de Löwenheim. Lo que Skolem tiene es, en efecto, un procedimiento de demostración: dada una fórmula prenexa F, generamos (efectivamente) la secuencia de instancias que corresponde a F; para cada elemento en esta secuencia podemos decidir efectivamente si es satisfactible o no; si hay un elemento de la secuencia que no sea satisfactible, F no es satisfactible, en consecuencia $\sim F$ es válida; si cada elemento de la secuencia es satisfactible, F es satisfactible (en un universo numerable) y $\sim F$ no es válida. Estamos muy cerca de la forma 'semántica' del teorema de Herbrand, mencionada arriba. (Para una discusión de estas cuestiones véase *van Heijenoort 1967*, pp. 229-231 y 508-509).

El argumento de Löwenheim también fue empleado por Gödel en su demostración de *1930*.

CAPÍTULO TERCERO

GENTZEN

En 1934 Gentzen presentó un sistema *LK*, y demostró que este sistema es sano y completo para la teoría de la cuantificación clásica (*Gentzen 1934*). Las reglas de *LK* no se aplican directamente a fórmulas, sino a ciertas formaciones de fórmulas, que se llaman *secuentes*. (Sobre el origen del sistema de Gentzen véase *Bernays 1965*.) Un secuente es un par ordenado de secuencias finitas de fórmulas, siendo la primera secuencia el *antecedente* del secuente y la segunda el *sucedente*.

Por lo general, un secuente se escribe

$$A_1, A_2, \ldots, A_m \rightarrow B_1, B_2, \ldots, B_n.$$

Un secuente es v para una asignación si y sólo si por lo menos una fórmula en el antecedente es f o por lo menos una fórmula en el sucedente es v (para cualquier asignación, un antecedente vacuo es v y un sucedente vacuo es f, y un secuente con antecedente vacuo y sucedente vacuo es f).

Los axiomas de *LK* son todos los secuentes de la forma

$$A \rightarrow A.$$

Hay dos clases de reglas: primero, las reglas estructurales, que permiten cambiar el arreglo de las fórmulas en un secuente; luego, reglas que, con respecto a cada conectivo o cuantificador, permiten su introducción en el antecedente o en el sucedente de un secuente.

Las reglas estructurales son las siguientes:

Dilución:

$$\frac{\Gamma \to \Theta}{A, \Gamma \to \Theta} \quad \text{(en el antecedente)} \qquad \frac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, A} \quad \text{(en el sucedente)}$$

Contracción:

$$\frac{A, A, \Gamma \to \Theta}{A, \Gamma \to \Theta} \quad \text{(en el antecedente)} \qquad \frac{\Gamma \to \Theta, A, A}{\Gamma \to \Theta, A} \quad \text{(en el sucedente)}$$

Intercambio:

$$\frac{\Delta, A, B, \Gamma \to \Theta}{\Delta, B, A, \Gamma \to \Theta} \quad \text{(en el antecedente)} \qquad \frac{\Gamma \to \Theta, A, B, \Lambda}{\Gamma \to \Theta, B, A, \Lambda} \quad \text{(en el sucedente)}$$

Corte:

$$\frac{\Gamma \to \Theta, A \qquad A, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}$$

Las reglas para conectivos y cuantificadores son las siguientes:

&-A $$\frac{A, B, \Gamma \to \Theta}{A \,\&\, B, \Gamma \to \Theta}$$

&-S $$\frac{\Gamma \to \Theta, A \qquad \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \,\&\, B}$$

v-A $$\frac{A, \Gamma \to \Theta \qquad B, \Gamma \to \Theta}{\mathrm{A \vee B}, \Gamma \to \Theta}$$

v-S $$\frac{\Gamma \to \Theta, A, B}{\Gamma \to \Theta, A \vee B}$$

$\supset$-A $$\frac{\Gamma \to \Theta, A \qquad B, \Gamma \to \Theta}{A \supset B, \Gamma \to \Theta}$$

$\supset$-S $$\frac{A, \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \supset B}$$

$\sim$-A $$\frac{\Gamma \to \Theta, A}{\sim A, \Gamma \to \Theta}$$

$\sim$-S $$\frac{A, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \sim A}$$

$\forall$-A $$\frac{At, \Gamma \to \Theta}{\forall x Ax, \Gamma \to \Theta}$$

$\forall$-S $$\frac{\Gamma \to \Theta, Aa}{\Gamma \to \Theta, \forall x Ax}$$

$\exists$-A $$\frac{Aa, \Gamma \to \Theta}{\exists x Ax, \Gamma \to \Theta}$$

$\exists$-S $$\frac{\Gamma \to \Theta, At}{\Gamma \to \Theta, \exists x Ax}$$

En la enunciación de estas reglas usamos mayúsculas griegas para secuencias de fórmulas, mayúsculas latinas para fórmulas, y la coma indica la concatenación de fórmulas y secuencias de fórmulas. Usamos una notación bien conocida para la sustitución.

En las reglas $\forall$-S y $\exists$-A, a es una variable libre que no ocurre en la conclusión de la regla. En las reglas $\forall$-A y $\exists$-S, t es cualquier término del sistema.

Siguiendo una sugerencia de Ketonen (*1944*; véase también *Bernays 1945*), dimos aquí a las reglas &-A, v-S y $\supset$-A una forma algo diferente de la que tienen en el sistema *LK* de Gentzen, y llamaremos *LKK* a esta versión del cálculo de los secuentes (la segunda *K* está por Ketonen).

Una derivación en *LK*, o en *LKK*, tiene la forma de un árbol, con su raíz abajo. En los nudos iniciales hay secuentes que son axiomas; luego proseguimos hacia abajo según las reglas. El secuente que está en la raíz del árbol es el *secuente final* de la derivación. Una derivación cuyo secuente final es $\rightarrow F$ es una *demostración* de *F*.

En *1934* Gentzen establece la equivalencia constructiva de *LK* con un sistema axiomático del tipo de Frege, *LHK*; es decir, muestra cómo una derivación de $\rightarrow F$ en *LK* se puede transformar, por medios sintácticos puramente efectivos, en una demostración en *LHK*. Esto establece la sanidad y la completud de *LK* para la teoría clásica de la cuantificación.

En el sistema *LKK* las reglas para conectivos se pueden invertir; es decir, si se toma como asunción el secuente que es la conclusión de una de estas reglas, se pueden derivar la (s) premisa (s) de la regla.

Por ejemplo, para la regla &-A:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & A \rightarrow A \\
(2) & B, A \rightarrow A \qquad\qquad B \rightarrow B \\
(3) & A, B \rightarrow A \qquad\qquad A, B \rightarrow B \\
(4) & \qquad A, B \rightarrow A \,\&\, B \qquad\qquad A \,\&\, B, \Gamma \rightarrow \Theta \\
(5) & \qquad\qquad\qquad A, B, \Gamma \rightarrow \Theta
\end{array}
$$

La fórmula de la línea (1) es un axioma. La primera fórmula de la línea (2) se obtiene de la fórmula de la línea (1) por dilución en el antecedente; la segunda fórmula de la línea (2) es una axioma. La primera fórmula de la línea (3) se obtiene de la primera fórmula de la línea (2) por intercambio en el antecedente; la segunda fórmula de la línea (3) se obtiene de la segunda fórmula de la línea (2) por dilución en el antecedente. La primera fórmula de la línea (4) se obtiene de las dos fórmulas de la línea (3) por la regla &-S; la segunda fórmula de la línea (1) es la conclusión de la regla &-A, que se toma como asunción. La fórmula de la línea (5), —que se obtiene de las dos fórmulas de la línea (4) por una aplicación de la regla de corte, es la premisa de esta misma regla &-A.

Si se consideran cuantificadores, hay semejante inversión

para las reglas $\forall$-S y $\exists$-A, pero no para las reglas $\forall$-A y $\exists$-S.

Del principio de inversión para las reglas oracionales Ketonen saca varias aplicaciones (véase los comentarios de Bernays en *1945*).

En *1934* Gentzen presenta, además de *LK*, un cálculo *LJ* adecuado para la teoría intuicionista de la cuantificación. La lógica intuicionista ha sido una codificación de las formas de argumentos que Brouwer considera correctos en matemáticas. En *1925* Kolmogorov dio una codificación de la lógica intuicionista que hoy se conoce como el cálculo mínimo. Lo que se ha llegado a conocer como la lógica intuicionista ha sido la codificación dada por Heyting en *1930* (véase también *Kleene 1952*). Las fórmulas siguientes, por ejemplo, no son demostrables en ella: $A \vee \sim A$, $\sim\sim A \supset A$, $\sim\forall x Ax \supset \exists x \sim Ax$.

Antes de Gentzen las codificaciones habían seguido el método axiomático. Gentzen obtiene la lógica intuicionista de modo sumamente sencillo: el sucedente de un secuente que ocurre en una derivación no debe contener más de una fórmula. Esta restricción transforma *LK* en un sistema *LJ*, y Gentzen demuestra la equivalencia constructiva de *LJ* con un sistema axiomático del tipo de Frege adecuado para la teoría intuicionista de la cuantificación.

Acerca de *LK* y *LJ*, Gentzen demuestra (*Hauptsatz, 1934*, p. 195; *1955*, p. 49; *1969*, p. 87) que una derivación que contiene aplicaciones de la regla de corte se puede transformar efectivamente en una derivación que no contiene semejantes aplicaciones.

Si llamamos a semejante derivación sin corte una derivación *normal*, podemos distinguir tres clases de resultados a propósito de derivaciones normales:

1) Teoremas sobre formas normales: mostramos que, para cada derivación, hay una derivación normal; esto es puramente un teorema de existencia;

2) Teoremas de normalización: mostramos que cada derivación puede ser efectivamente transformada en una derivación normal;

3) Teoremas de normalización fuerte: tenemos un cierto número de reglas efectivas para transformar derivaciones, y

mostramos que cada secuencia de aplicaciones de estas reglas termina en la misma derivación normal, que es única.

Con esta nomenclatura el *Hauptsatz* de Gentzen es un teorema de normalización.

En un sistema axiomático del tipo de Frege para la teoría de la cuantificación, de la conclusión B de una aplicación de la regla de separación no se puede inferir lo que son las premisas de la aplicación de la regla: son de la forma A y $A \supset B$, para algún A; pero esta fórmula A no se puede recobrar de la conclusión obtenida por una aplicación de la regla. En *LK* y en *LJ*, en una aplicación de la regla de corte la situación es semejante: no podemos recobrar la fórmula A que ocurre en el sucedente de una premisa y el antecedente de la otra y se elimina por la aplicación de la regla. Si examinamos las otras reglas de *LK* y de *LJ*, observamos que, con respecto a cada regla, cada fórmula que ocurre en las premisas de la regla es una subfórmula de una fórmula que ocurre en la conclusión, entendiéndose la palabra 'subfórmula' en el sentido extenso que ahora aclaramos: una fórmula G es una *subfórmula estricta* de una fórmula F si y sólo si G tiene una ocurrencia en F; una fórmula G es una *subfórmula* de una fórmula F si y sólo si G es una subfórmula estricta de F o se obtiene de una subfórmula estricta de F por medio de la sustitución de un término por una o varias ocurrencias de una variable libre. Obtenemos inmediatamente el resultado de que cada fórmula que ocurre en una derivación sin corte en *LK* o en *LJ* es una subfórmula, en el sentido extenso que hemos introducido, de una fórmula que ocurre en el secuente final de la derivación. Esto es la *propiedad de las subfórmulas* de *LK* y de *LJ*. De este modo una demostración sin corte no implica ninguna noción extraña a la conclusión y prosigue hacia la conclusión sin rodeos.

Gentzen mismo comenta así este punto: "El *Hauptsatz* dice que cada demostración puramente lógica se puede reducir a una forma normal bien definida, aunque no sea única. Quizás podamos expresar las propiedades esenciales de tal demostración normal diciendo que no hace rodeos. No entran en la demostración otros conceptos que no sean los contenidos en su resultado final y por esto el uso de esos conceptos era

esencial para obtener ese resultado." (*1934*, p. 177; *1955*, pp. 4-5; *1969*, p. 70).

Como un ejemplo de una aplicación del *Hauptsatz* de Gentzen, la propiedad de las subfórmulas de *LJ* da muy sencillamente un procedimiento de decisión para la lógica oracional intuicionista. El teorema resultó también muy cómodo para establecer que ciertas fórmulas que son demostrables en la teoría de la cuantificación clásica no son demostrables intuicionistamente. Quizás, sin embargo, las aplicaciones más importantes del teorema de la forma normal están en las demostraciones de no-contradicción.

En tal demostración se trata de establecer que existe una fórmula *C* que no tiene demostración formal. Con el teorema de la forma normal, si *C* no tiene demostración formal normal, no tiene demostración formal del todo. Pero, en vista de los rasgos muy particulares de una demostración normal es con frecuencia mucho más fácil establecer, en conexión con la estructura sintáctica de *C*, la ausencia de tal demostración normal que la de una demostración en general.

Naturalmente, para poder aplicar este argumento en una demostración finitista de no-contradicción es necesario que la demostración de la existencia de una demostración formal normal, bajo la asunción de la existencia de una demostración formal, sea efectiva. En general, al usar un teorema de la forma normal en una demostración de no-contradicción, la medida de la complejidad de los argumentos para establecer la no-contradicción no puede ser menor que la medida de la complejidad de los argumentos para establecer el teorema de la forma normal.

Con respecto a *LK* (¡pero no a *LJ*!) el *Hauptsatz* de Gentzen puede recibir una forma reforzada, el *verschärfter Hauptsatz* (*1934*, p. 408; *1955*, pp. 114-115; *1969*, pp. 106-107). Según este nuevo resultado la derivación de un secuente en el cual todas las fórmulas son prenexas se puede transformar efectivamente en una derivación que, primero, no contiene aplicaciones de la regla de corte (*Hauptsatz*) y, luego, contiene un *secuente medio* (*Mittelsequenz*) que tiene las propiedades siguientes:

1) La derivación del secuente medio desde los axiomas (en

consecuencia, el secuente medio mismo) no contiene cuantificadores;

2) La derivación del secuente final desde el secuente medio contiene solamente aplicaciones de las cuatro reglas para cuantificadores y de las reglas estructurales.

La relación del *verschärfter* ***Hauptsatz*** de Gentzen con el teorema de Herbrand es obvia. En ambos casos el trabajo con los cuantificadores se separa del trabajo con los conectivos sentenciales y obtenemos la propiedad de las subfórmulas. Gentzen mismo llama la atención sobre la conexión entre su resultado y el de Herbrand (*1934,* p. 409, nota 6; *1955,* p. 115, nota; 6; *1969,* p. 313, nota 25; también *1934,* p. 177, nota 3; *1955,* p. 4, nota 3; *1969,* p. 313, nota 22). Pero declara erróneamente que Herbrand enunció su teorema sólo con respecto a fórmulas prenexas (este error se repite en muchos textos) y que en consecuencia el teorema de Herbrand es 'un caso particular' del *verschärfter Hauptsatz.* Es más bien lo contrario, puesto que el secuente al cual se aplica el resultado de Gentzen tiene que componerse de fórmulas prenexas. Naturalmente, en términos de secuentes, el teorema de Herbrand se aplica solamente a un secuente que tiene su antecedente vacuo, pero para la lógica clásica eso no es una restricción. Existen importantes diferencias entre la demostración de su teorema por Gentzen y la del suyo por Herbrand, pero no podemos entrar en eso aquí.

La introducción de la identidad en el cálculo de secuentes no presenta grandes problemas; sobre este punto véase *Mints 1967* y ***van Heijenoort 1970.***

Hay, estrechamente asociado a *LK,* un procedimiento de demostración para la teoría de la cuantificación clásica que tiene rasgos atractivos desde el punto de vista pedagógico.

El método se apoya sobre la observación sencilla de que, a partir del valor de verdad de una fórmula G para una asignación α, podemos inferir el valor de verdad de algunas subfórmulas de G para α, o para alguna extensión de α. Si, para alguna asignación α, $v[\alpha, H \vee K] = \mathrm{f}$, entonces $v[\alpha, H] = \mathrm{f}$ y $v[\alpha, K] = \mathrm{f}$. Si $v[\alpha, \exists x H] = \mathrm{v}$, entonces $v[\alpha', H(x/a)] = \mathrm{v}$, donde α' es una extensión de α.

Dada una fórmula F, vamos hacer una lista de fórmulas que

son subfórmulas de $\sim F$ o negaciones de tales subfórmulas: una fórmula G está en la lista si y sólo si, bajo la asunción de que, para alguna asignación α para F, $v[\alpha, \sim F] = \text{v}$, hay una extensión α' de α tal que $v[\alpha', G] = \text{v}$. Si $\sim(H \text{ v } K)$ está en la lista, $\sim H$ y $\sim K$ están en la lista. Si H v K está en la lista, sabemos que H o K debe ser puesta en la lista, pero no sabemos cuál; consideramos entonces dos listas alternativas: además de lo que ya hemos obtenido, una lista contendrá H, la otra K. Así obtenemos listas que tienen una parte inicial en común pero divergen en algún punto. Es conveniente escribir tales listas en la forma de un árbol en cuyos nudos hay subfórmulas de $\sim F$ o negaciones de tales subfórmulas; el árbol tiene su raíz arriba y va desarrollándose hacia abajo.

Un *árbol de falsificabilidad* para una fórmula F es un árbol en cuya raíz se encuentran la fórmula $\sim F$ y en cuyos otros nudos se encuentran fórmulas obtenidas por reglas que codifican la prescripción que acabamos de introducir. Si un árbol para F está *cerrado,* es decir si para cada rama del árbol hay una fórmula G tal que G se encuentra en un nudo de la rama y $\sim G$ en otro, entonces no hay ninguna asignación α tal que $v[\alpha, \sim F] = \text{v}$, así pues F es válida. Si un árbol para F no está cerrado y está *acabado,* es decir, si no hay en el árbol ningún nudo al que no se haya aplicado la regla apropiada (respetamos, además, algunos constreñimientos débiles sobre el orden en el que se deben aplicar las reglas), entonces cada rama no cerrada de tal árbol da una asignación falsificante para F.

Este método se conoce como el *método de los árboles de falsificabilidad.* Se puede establecer cómodamente que es correcto y completo. El método se presenta, para el uso en las clases, en *Jeffrey 1967.* Hay una investigación más completa del método en *Smullyan 1968.*

Cuando un árbol de fasificabilidad para una fórmula F está cerrado, se puede transformar en una demostración sin corte en LK del secuente $\rightarrow F$ en una manera puramente mecánica (y bastante sencilla).

El método de los árboles de falsificabilidad se puede adaptar a la teoría de la cuantificación intuicionista (véase *Fitting 1969).* Pero resulta algo más complicado y su relación con LJ es menos directa que la del método clásico de los árboles con LK.

CAPÍTULO CUARTO

DEDUCCION NATURAL

En la práctica matemática los argumentos no siguen el patrón de las demostraciones que encontramos en los sistemas de Frege, Russell o Hilbert (lo que arriba hemos llamado el método axiomático) y se han hecho esfuerzos por obtener una formalización de la deducción lógica que se acerque más a lo que los matemáticos hacen de hecho. Desarrollando algunas sugerencias hechas por Lukasiewicz en 1926, Jaśkowski presentó en 1934 un 'método de suposición'. En el mismo año Gentzen propuso dos sistemas de *deducción natural,* uno, *NJ,* para la teoría intuicionista de la cuantificación y uno, *NK,* para la teoría clásica de la cuantificación. Jaśkowski y Gentzen explotan la misma idea básica: empezar una demostración con asunciones y subsecuentemente descargar estas asunciones por condicionalización.

Ahora presentamos sistemas de deducción natural estrechamente relacionados con los de Gentzen. Las derivaciones tienen forma de árboles, con la raíz abajo. En los nudos iniciales de las ramas se encuentran fórmulas que son asunciones. Descendemos por el árbol según las reglas que vamos a enunciar. Una fórmula entre paréntesis cuadrados en el enunciado de una regla indica que, cada vez que se aplique la regla, todas las ocurrencias de la fórmula que son asunciones que dominan la conclusión de la regla tienen que ser descargadas, es decir, no ser consideradas ya como asunciones. Los ejemplos que daremos más adelante mostrarán cómo funcionan las reglas.

Una derivación en la cual se han descargado todas las asun-

ciones es una demostración. En el enunciado de las reglas, las premisas y la conclusión están separadas por una línea.

$$\&\text{-I}\quad \frac{A \quad B}{A \,\&\, B} \qquad \&\text{-E}\quad \frac{A \,\&\, B}{A} \qquad \frac{A \,\&\, B}{B}$$

$$\text{v-I}\quad \frac{A}{A \vee B} \qquad \frac{B}{A \vee B} \qquad \text{v-E}\quad \frac{A \vee B \quad \overset{[A]}{C} \quad \overset{[B]}{C}}{C}$$

$$\supset\text{-I}\quad \frac{\overset{[A]}{B}}{A \supset B} \qquad \supset\text{-E}\quad \frac{A \quad A \supset B}{B}$$

$$\forall\text{-I}\quad \frac{Aa}{\forall x Ax} \qquad \forall\text{-E}\quad \frac{\forall x Ax}{At}$$

$$\exists\text{-I}\quad \frac{At}{\exists x Ax} \qquad \exists\text{-E}\quad \frac{\exists x Ax \quad \overset{[Aa]}{B}}{B}$$

En la regla $\forall$-I, a, que es una variable libre, no puede ocurrir dentro de las asunciones que dominan Aa; en la regla $\exists$-E, a no puede ocurrir dentro de B o de las asunciones que dominan B, con excepción de las de la forma Aa (que son descargadas por la aplicación de la regla). En las reglas $\forall$-E y $\exists$-I, t es un término del sistema.

En cada regla de eliminación la premisa que contiene el conectivo oracional o el cuantificador eliminados por la aplicación de la regla se llama la premisa *mayor* y la (s) otra (s) premisa (s), si existe (n), se llama (n) la (s) premisa(s) *menor(es)*.

Hay para cada conectivo y cuantificador una regla de introducción y una regla de eliminación, de tal manera que cada paso en una demostración es la aplicación de una regla que implica un solo conectivo o cuantificador, introduciéndolo o eliminándolo. Si se introduce un conectivo o un cuantificador, éste es el símbolo extremo de la conclusión de la regla; si se elimina, es el símbolo extremo de la premisa mayor de la regla. (El símbolo *extremo* de una fórmula es el último símbolo que se usó en la formación de la fórmula.)

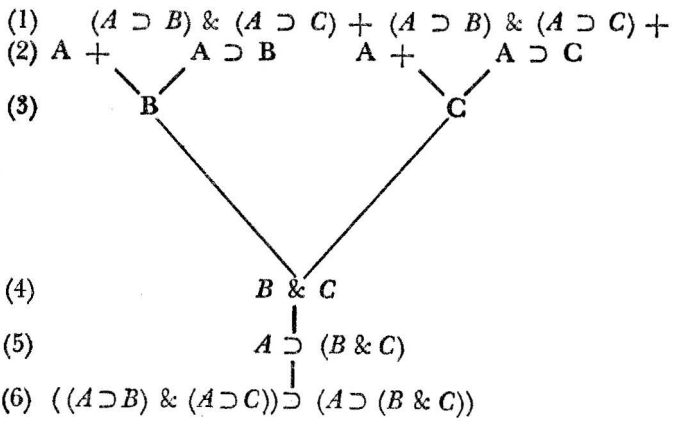
Acerca de estas reglas Gentzen escribe (*1934*, p. 189; *1955*, p. 27; *1969*, p. 80): "Las introducciones representan, por así decirlo, las 'definiciones' de los símbolos correspondientes y las eliminaciones no son en último análisis, más que las consecuencias de estas definiciones. Este hecho se puede expresar como sigue: cuando eliminamos un símbolo, podemos usar la fórmula con cuyo símbolo terminal tratamos solamente 'en el sentido que la introducción de este símbolo le ha dado'."

Suponemos que la constante oracional f está entre los símbolos primitivos y $\sim$A es definida como $A \supset f$; tenemos entonces las siguientes reglas de introducción y de eliminación para la negación:

$$\sim\text{-I} \quad \frac{\begin{matrix}[A] \\ f\end{matrix}}{\sim A} \qquad\qquad \sim\text{-E} \quad \frac{A \quad \sim A}{f}$$

Estas son meramente la transcripción de las reglas $\supset$-I y $\supset$-E.

Ahora damos un ejemplo de una derivación.



En la línea (1) tenemos dos asunciones, cada una de las cuales es una ocurrencia de $(A \supset B)$ & $(A \supset C)$. En la línea (2) tenemos, primero, la asunción A, luego $A \supset B$, obtenida de la fórmula que aparece directamente encima por la regla &-E, lue-

go la asunción A, por fin $A \supset C$, obtenida de la fórmula que aparece directamente encima por la regla &-E. En la línea (3) tenemos B, obtenida de A y $A \supset B$ (en la línea (2)) por la regla $\supset$-E, y C, obtenida de A y $A \supset C$ en la línea (2)) por la la regla $\supset$-E. En la línea (4) tenemos B & C, obtenida de B y C (en la línea (3)) por la regla &-I. En la línea (5) tenemos $A \supset (B \& C)$, obtenida de B & C (en la línea (4)) descargando las dos ocurrencias de A en la línea (2) por la regla $\supset$-I. En la línea (6) tenemos la fórmula final, obtenida de la fórmula en la línea (5) descargando las dos asunciones hechas en la línea (1) por la regla $\supset$-I. No hay, finalmente, ninguna asunción que no esté descargada, y hemos establecido la fórmula que está en la línea (6). Nuestra derivación es una demostración.

(En la práctica es conveniente marcar una asunción con un signo de — cuando se hace la asunción y cambiar este signo de — a un signo de + cuando se descarga la asunción.)

Con las reglas enunciadas hasta ahora no obtenemos la teoría clásica de la cuantificación; obtenemos un sistema más débil, conocido como la teoría minimal de la cuantificación de Johansson (*1936*). Si añadimos al sistema la regla

$$\sim\text{-Int} \qquad \frac{f}{A},$$

donde A es una fórmula atómica, obtenemos la teoría intuicionista de la cuantificación.

Ahora damos un ejemplo de una derivación en la teoría intuicionista de la cuantificación.

(1) A + $A \supset f$ +
(2) f
(3) B
(4) $(A \supset f) \supset B$
(5) $A \supset ((A \supset f) \supset B)$.

En la línea (1) tenemos las asunciones A y $A \supset f$. En la línea (2) tenemos f, obtenida de estas dos asunciones por la regla $\supset$-E. En la línea (3) tenemos B, obtenida de f (en la línea (2))

por la regla $\sim$-Int. En la línea (4) tenemos $(A \supset f) \supset B$, obtenida de B (en la línea (3)) descargando la asunción $A \supset f$ (en la línea (1)) por la regla $\supset$-I. En la línea (5) tenemos la fórmula final, obtenida de la fórmula que aparece en la línea (4) descargando la asunción A (en la línea (1)) por la regla $\supset$-I. No hay, finalmente, ninguna asunción que no sea descargada, y hemos demostrado en la teoría intuicionista de la cuantificación la fórmula

$$A \supset ((A \supset f) \supset B).$$

Esta fórmula puede escribirse

$$A \supset (\sim A \supset B),$$

y no es demostrable en la teoría minimal de la cuantificación. La regla $\sim$-Int puede considerarse como una forma del principio *Ex falso sequitur quodlibet.*

Si, en lugar de añadir a nuestro sistema inicial la regla $\sim$-Int, añadimos la regla

$$\sim\text{-Clas} \qquad \frac{\begin{matrix}[\sim A] \\ f\end{matrix}}{A},$$

donde A es una fórmula atómica, obtenemos la teoría clásica de la cuantificación.

Ahora damos un ejemplo de una derivación en la teoría clásica de la cuantificación.

(1) $A \supset f$ + $\quad (A \supset f) \supset f$ +
(2) f
(3) A
(4) $((A \supset f) \supset f) \supset A.$

En la línea (1) tenemos las asunciones $A \supset f$ y $(A \supset f) \supset f$. En la línea (2) tenemos la fórmula f, obtenida de las dos asunciones en la línea (1) por la regla $\supset$-E. En la línea (3) tenemos la fórmula A, obtenida de f (en la línea (2)) por la regla $\sim$-Clas, y con ello la asunción $A \supset f$, en la línea (1), está des-

cargada. En la línea (4) tenemos la fórmula final, obtenida de la fórmula en la línea (3) descargando la asunción $(A \supset f) \supset f$, que está en la línea (1), por la regla $\supset$-I. No hay, finalmente, ninguna asunción que no sea descargada, y hemos demostrado en la teoría clásica de la cuantificación la fórmula

$$((A \supset f) \supset f) \supset A.$$

Esta fórmula puede escribirse

$$\sim\sim A \supset A,$$

y es la ley de la doble negación; la fórmula no es demostrable en la teoría intuicionista (y, *a fortiori,* minimal) de la cuantificación.

La restricción, en $\sim$-Int y $\sim$-Clas, de que la fórmula A sea atómica no es necesaria para las derivaciones (ni, en particular, para las demostraciones), es decir, si, con un conjunto de asunciones, tenemos una derivación de una fórmula A aplicando $\sim$-Int o $\sim$-Clas sin la restricción, entonces existe una derivación de A con el mismo conjunto de asunciones en la cual se aplican las reglas $\sim$-Int y $\sim$-Clas solamente con la restricción. La restricción se introduce a causa de las cuestiones de forma normal que veremos más abajo.

El sistema *NJ* de Gentzen es un sistema de deducción natural que es exactamente lo que hemos presentado arriba como teoría intuicionista de la cuantificación; pero él obtuvo su sistema *NK* para la teoría clásica de la cuantificación, de una manera diferente a la que seguimos arriba: en lugar de remplazar la regla $\sim$-Int por la regla $\sim$-Clas, añade a *NJ* el esquema de axioma

$$A \vee \sim A.$$

No tiene sistema para la lógica minimal.

En *1934* Gentzen presentó las reglas para sus dos sistemas de deducción natural, intuicionista y clásica. Le pareció, sin embargo, que no podía enunciar y demostrar de manera conveniente un teorema de la forma normal para estos sistemas y se volvió hacia *LJ* y *LK* (véase *Gentzen 1934,* p. 177; *1955,* p. 5;

1969, p. 69), que hemos estudiado arriba. (Observemos, sin embargo, que el sistema empleado por Gentzen en su primera demostración de no-contradicción de la aritmética de primer orden (*1936*) es un sistema de deducción natural.)

En *1965* Dag Prawitz publicó resultados que llenaron la laguna dejada por Gentzen (véase también *Prawitz 1970*). Demostró, para los sistemas de deducción natural que hemos presentado, un análogo del *Hauptsatz* de Gentzen, que ahora presentaremos. (Resultados similares a los de Prawitz fueron obtenidos al mismo tiempo por Andrés R. Raggio (*1965*).)

Ya hemos observado que, para cada conectivo oracional y cada cuantificador, hay una regla de introducción y una regla de eliminación. Supongamos que una aplicación de una regla de introducción vaya seguida inmediatamente por una aplicación de la regla de eliminación para el mismo conectivo o cuantificador. Así por ejemplo,

$$\begin{array}{cc} \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ A & B \\ & A \,\&\, B \\ & A \\ & \Sigma_3 \end{array}$$

donde tenemos una aplicación de &-I seguida por una aplicación de &-E (Σ_1, Σ_2 y Σ_3 son trozos del árbol de la derivación). Puede considerarse la fórmula A & B, que es precedida y seguida por fórmulas de menor complejidad lógica (A y B), como un máximo local. Esta *fórmula máxima* se puede eliminar, es decir, llegamos al mismo trozo inferior Σ_3 considerando la derivación

$$\begin{array}{c} \Sigma_1 \\ A \\ \Sigma_3. \end{array}$$

En aplicaciones de las reglas v-E o $\exists$-E una ocurrencia de una fórmula está directamente bajo otra ocurrencia de la misma fórmula. Una secuencia finita, A_1, A_2, ..., A_k, de ocurrencias de la misma fórmula en una derivación es un *segmento máximo* en esta derivación si y sólo si A_{i+1} (para $1 \leqq i < k$) se en-

cuentra inmediatamente bajo A_i, A_1 es la conclusión de una introducción y A_k es la premisa mayor de una eliminación.

Una derivación es *normal* si y sólo si no contiene ninguna fórmula máxima ni ningún segmento máximo.

Como lo hemos indicado más arriba, las fórmulas máximas se pueden eliminar de una derivación. Para formular los procedimientos por cuyo medio se hace esta eliminación tenemos que introducir una nueva notación. Sea A una fórmula que ocurre como asunción una o varias veces en una derivación Σ_2; sea Σ_1 un trozo de derivación tal que

$$\begin{array}{c}\Sigma_1\\ A\end{array}$$

sea una derivación. Con la notación

$$\begin{array}{c}\Sigma_1\\ (A)\\ \Sigma_2\end{array}$$

se denota la derivación (¡hay que verificar que sea una derivación!) que se obtiene cuando se toma Σ_2 y se escribe Σ_1 encima de cada ocurrencia de A en Σ_2 que es una asunción.

Ahora enunciamos cinco procedimientos de reducción que se aplican a las derivaciones que contienen fórmulas máximas. La derivación original está a la izquierda, la derivación transformada a la derecha.

&-reducción:

$$\begin{array}{ccc}\Sigma_1 & \Sigma_2 & \\ A_1 & A_2 & \\ A_1 \,\&\, A_2 & & \\ A_i & & \\ \Sigma_3 & & \end{array} \qquad \begin{array}{c}\Sigma_i\\ A_i\\ \Sigma_3\end{array} \qquad i = 1 \text{ ó } 2$$

v-reducción:

$$\begin{array}{ccccc}\Sigma_1 & [A_1] & [A_2] & \Sigma & \\ A_i & \Sigma_2 & \Sigma_2 & (A_i) & \\ A_1 \vee A_2 & B & B & \Sigma & \\ B & & & B & \\ \Sigma_4 & & & \Sigma_4 & \end{array} \qquad i = 1 \text{ ó } 2$$

$\supset$-reducción:

$$\begin{array}{lll} & [A_1] & \\ & \Sigma_2 & \Sigma_1 \\ \Sigma_1 & A_2 & (A_1) \\ A_1 & A_1 \supset A_2 & \Sigma_2 \\ A_2 & & A_2 \\ \Sigma_3 & & \Sigma_3 \end{array}$$

$\forall$-reducción:

$$\begin{array}{ll} \Sigma_1 & \\ Aa & \Sigma_1(a/t) \\ \forall x Ax & At \\ At & \Sigma_2 \\ \Sigma_2 & \end{array}$$

$\exists$-reducción:

$$\begin{array}{lll} \Sigma_1 & Aa & \Sigma_1 \\ At & \Sigma_2 & (At) \\ \exists x Ax & B & \Sigma_2(a/t) \\ B & & B \end{array}$$

$\Sigma_i\,(a/t)$ ($i = 1$ ó 2) es el trozo de derivación que se obtiene cuando en Σ_i cada ocurrencia de a, que es una variable libre, se remplaza por una ocurrencia del término t (las condiciones en las reglas $\forall$-I y $\exists$-E aseguran que, si Σ_i es un trozo de derivación, $\Sigma_i\,(a/t)$ también es un trozo de derivación).

Otros procedimientos de reducción permiten disminuir la longitud de segmentos máximos.

Prawitz pudo establecer el siguiente teorema:

Teorema de normalización fuerte. Cada derivación **II** en un sistema de deducción natural (para la lógica minimal, intuicionista o clásica) se puede reducir a una derivación normal única II', y cada secuencia de reducciones que empieza con II termina con II'.

Ciertas aplicaciones de la regla v-E no son realmente necesarias, las llamadas *redundantes*. Por ejemplo, una aplicación de v-E es redundante si las dos premisas menores no están dominadas por asunciones que sean descargadas por la aplicación de la regla. Del mismo modo hay aplicaciones redun-

dantes de $\exists$-E. Una aplicación de $\sim$-Clas puede ser redundante, como lo muestra el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{l} \Sigma_1 \\ A \qquad A \supset f \; + \\ \quad f \\ \quad A \\ \quad \Sigma_2. \end{array}$$

Tal derivación se puede reemplazar por

$$\begin{array}{l} \Sigma_1 \\ A \\ \Sigma_2. \end{array}$$

Cuando todas las aplicaciones redundantes de reglas se han eliminado de una derivación normal, se dice que la derivación es *completamente* normal.

Con respecto a derivaciones completamente normales en los sistemas de deducción natural para la lógica minimal o para la lógica intuicionista tenemos el principio de las subfórmulas, según el cual cada fórmula en una derivación de una fórmula A desde un conjunto Γ de asunciones es una subfórmula de A o de cierto elemento de Γ. Para la lógica clásica la formulación del principio de las subfórmulas es ligeramente más complicada.

CONCLUSIÓN

La teoría de la cuantificación tiene menos de cien años, pero, como hemos visto, tiene una rica historia. Revisemos en resumen las etapas más importantes de esta historia.

1) El *método axiomático* hace resaltar la noción de sistema formal; históricamente, fue una reacción en contra del psicologismo en lógica; filosóficamente, da un ejemplo de un lenguaje artificial en el cual se hacen las demostraciones; pedagógicamente, ayuda al alumno a comprender la noción de sistema formal. El método da un análisis de la noción de teorema, pero no estudia las demostraciones como tales. La investigación no va más allá de la existencia de una demostración formal; y no existen criterios, con excepción quizás de vagos criterios estéticos, que introduzcan distinciones entre demostraciones.

2) El *método de Herbrand* se basa en el resultado fundamental descubierto por Herbrand con respecto a la teoría clásica de la cuantificación: una fórmula sin cuantificadores, obtenida de la fórmula dada de manera efectiva, es (oracionalmente) válida. Este método introduce una clase de demostraciones normales, en las cuales el trabajo con los cuantificadores se separa del trabajo oracional y que no usan ninguna noción que no esté en la fórmula demostrada. El método tiene muchas aplicaciones de primer plano: demostraciones de no-contradicción, problemas de decisión y de reducción, demostración de teoremas por máquina (sobre este último punto véase *Chang y Lee 1973*).

3) El *cálculo de secuentes de Gentzen* vuelve a encontrar los resultados de Herbrand, pero da también un análisis de la parte oracional de la demostración (Herbrand no presta aten-

ción a tales conectivos oracionales; los axiomas de Q_H son simplemente todas las fórmulas sin cuantificadores que son (oracionalmente) válidas. Una gran ventaja del cálculo de secuentes es que permite tratar la teoría intuicionista de la cuantificación de manera muy sencilla.

4) Los sistemas de *deducción natural* explotan a fondo la regla de condicionalización y así no necesitan axiomas. Para cada conectivo oracional y cuantificador hay una regla de introducción y una regla de eliminación; la primera se puede considerar como una definición que introduce el sentido del conectivo o del cuantificador, y la segunda es una consecuencia directa de esta definición. Los sistemas de deducción natural enseñan muy claramente la relación entre la lógica minimal, la lógica intuicionista y la lógica clásica. Las demostraciones en estos sistemas se pueden reducir a formas normales que tienen propiedades notables.

Cuando salimos de la lógica de primer orden y pasamos a la lógica de segundo orden o aun a la lógica de orden omega, se pueden adaptar a la nueva lógica el método axiomático, el cálculo de secuentes y la deducción natural (¡pero no el método de Herbrand!). Con respecto al cálculo de secuentes y la deducción natural se pueden considerar demostraciones normales, pero, a consecuencia del teorema de Gödel sobre la incompletud de la aritmética (*1931*), el procedimiento de normalización ya no puede ser efectivo. Por ejemplo, según un resultado de Takeuti (*1953*), lo análogo del *Hauptsatz* de Gentzen para la lógica de segundo orden, formalizada en un cálculo de secuentes, implica la no-contradicción de la aritmética. (Hay una demostración simplificada de este resultado en *Prawitz 1965*, pp. 72-73.) Pero, con estas breves indicaciones, abandonamos este tema. No queremos salirnos de los límites que nos habíamos impuesto; nuestro propósito era enseñar cuáles son las relaciones históricas y teóricas entre los varios métodos que se aplican a la teoría de la cuantificación.

Referencias

Aanderaa, Stål

Véase Dreben, Burton, y Stål Aanderaa; véase también Dreben Burton, Peter Andrews y Stål Aanderaa.

Ackerman, Wilhelm

Véase Hilbert, David y Wilhelm Ackerman.

Andrews, Peter

Véase Dreben, Burton, Peter Andrews y Stål Aanderaa.

Bernays, Paul

1945 Reseña de *Ketonen 1944, The Journal of Symbolic Logic 10,* pp. 127-130.

1954 Über den Zusammenhang des Herbrand'schen Satzes mit den neueren Ergebnissen von Schütte und Stenius, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Amsterdam, September 2-September 9,* vol 2, p. 397.

1965 Betrachtungen zum Sequenzen-Kalkul, *Contributions to Logic and Methodology in Honor of J. M. Bochenski,* editado por Anna-Teresa Tymieniecka, North-Holland, Amsterdam.

Véase Hilbert, David y Paul Bernays.

Chang, Chin-Liang y Richard Char-Tung Lee

1973 *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving,* Academic Press, Nueva York y Londres.

Church, Alonzo

1956 *Introduction to Mathematical Logic,* vol. 1, Princeton University Press, Princeton.

Denton, John

Véase Dreben, Burton, y John Denton.

Dreben, Burton y Stål Aanderaa

1964 Herbrand analyzing functions, *Bulletin of the American Mathematical Society 70,* pp. 697-698.

Dreben, Burton, Peter Andrews y Stål Aanderaa.

1963 Errors in Herbrand, *American Mathematical Society, Notices 10,* 285; nota presentada al congreso de la American Mathematical Society, 29 de abril-3 de mayo de 1963.

1963a False lemmas in Herbrand, *Bulletin of the American Mathematical Society 69,* pp. 699-706.

Dreben, Burton y John Denton

1966 A supplement to Herbrand, *The Journal of Symbolic Logic 13*, pp. 393-398.

1968 Herbrand-style consistency proofs, en *Kino, Myhill y Vesley 1968*, pp. 419-433.

Fenstad, Jens E. (editor)

1970 *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium* (Oslo, 1970), North-Holland, Amsterdam y Londres, 1971.

Fitting, Melvin Chris

1969 *Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing*, North-Holland, Amsterdam y Londres.

Frege, Gottlob

1879 *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle; reimpreso en *Frege 1964;* versión inglesa en *van Heijenoort, 1967*, pp. 1-82; versión castellana en *Frege 1972*, pp. 5-104.

1884 *Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau; reimpreso 1934, Marcus, Breslau, y en *Frege 1950;* versión inglesa en *Frege 1950;* versión castellana en *Frege 1972*, pp. 105-206.

1893 *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, Jena, vol. 1; reimpreso 1962, Olms, Hildesheim; versión inglesa parcial en *Frege 1964a.*

1903 ———, vol. 2.

1950 *The Foundations of Arithmetic, A Logico-mathematical Enquiry into the Concept of Number*, versión inglesa de *Frege 1884*, con el texto alemán, por John Langshaw Austin, Blackwell, Oxford, y Philosophical Library, Nueva York; 2a. ed. revisada, 1963; reimpreso, pero sin el texto alemán, 1960, Harper, Nueva York.

1964 *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, editado por Ignacio Angelelli, Olms, Hildesheim.

1964a *The Basic Laws of Arithmetic. Exposition of the System*, traducido y editado, con una introducción, por Montgomery Furth, University of California Press, Berkeley y Los Angeles, California.

1972 *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética. Otros estudios filosóficos*, versión castellana de *Frege 1879, Frege 1884* y otros escritos de Frege, por Hugo Padilla, Universidad Nacional Autónoma de México, México.

Gentzen, Gerhard

1934 Untersuchungen über das logische Schliessen, *Mathematische Zeitschrift 39* (1934-1935), pp. 176-210, 405-431; versión francesa en *Gentzen 1955;* versión inglesa en *Gentzen 1969*, pp. 68-131.

1936 Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, *Mathema-*

tische Annalen 112, pp. 493-565; versión inglesa en *Gentzen 1969*, pp. 132-213.

1955 *Recherches sur la déduction logique*, versión francesa de *Gentzen 1934*, con un comentario, por Robert Feys y Jean Ladrière, Presses Universitaires de France, Paris.

1969 *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, editado, con una introducción, por M. E. Szabo, North-Holland, Amsterdam y Londres.

Gödel, Kurt

1930 Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Mathematik und Physik 37*, pp. 349-360; versión inglesa en *van Heijenoort 1967*, pp. 582-591.

1931 Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter System I, *Monatshefte für Mathematik und Physik 38*, 173-198; versión inglesa en *van Heijenoort 1967*, pp. 596-616.

Herbrand Jacques

1930 *Recherches sur la théorie de la démonstration*, tesis de doctorado en la Universidad de París; también Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, wydzial III, no. 33; reimpreso en *Herbrand 1968*, pp. 35-153; versión inglesa en *Herbrand 1971*, pp. 44-202; versión inglesa del capítulo 5 en *van Heijenoort 1967*, pp. 525-581.

1968 *Ecrits logiques*, editado, con una introducción, por Jean van Heijenoort, Presses Universitaires de France, París.

1971 *Logical Writings*, editado, con una introducción, por Warren D. Goldfarb, Reidel, Dordrecht.

Heyting, Arend

1930 Die formale Regeln der intuitionistichen Logik, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse*, pp. 42-56, 57-71, 158-169.

Hilbert, David y Wilhelm Ackermann

1928 *Grundzüge der theoretischen Logik, Springer, Berlin*, Göttingen y Heidelberg.

Hilbert, David y Paul Bernays

1939 *Grundlagen der Mathematik II*, Springer, Berlín, Göttingen y Heidelberg; 2a. ed., 1970.

Jaśkowski, Stanislaw

1934 *On the Rules of Supposition in Formal Logic*, Studia logica, no. 1, Varsovia.

Jeffrey, Richard C.

1967 *Formal Logic: its Scope and Limits*, McGraw-Hill, Nueva York.

Johansson, Ingebrigt

1936 Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus, *Compositio mathematica 4*, pp. 119-136.

Ketonen, Oiva
1944 *Untersuchungen zum Prädikatenkalkül*, Annales Academiae scientiarum fennicae, series A, I, *23*, Helsinki.

Kino, Akiko, John Myhill y Richard Eugene Vesley (editores).
1968 *Intuitionism and Proof Theory, Proceedings of the Summer Conference at Buffalo, N. Y., 1968*, North-Holland, Amsterdam y Londres, 1970.

Kleene, Stephen Cole
1952 *Introduction to Metamathematics*, Van Nostrand, Princeton.

Kolmogorov, Andrei Nikolaevich
1925 O printsipe tertium non datur, *Mathematicheskii sbornik 32*, pp. 646-667; versión inglesa en *van Heijenoort 1967*, pp. 414-437.

Kreisel, Georg
1952 On the concepts of completeness and interpretation of formal systems, *Fundamenta mathematicae 39*, pp. 103-127.
1958 Elementary completeness properties of intuitionistic logic with a note on negations of prenex formulae, *The Journal of Symbolic Logic 23*, pp. 317-330: errata *ibid.*, vi.

Lee, Richard Char-Tung
Véase Chang, Chin-Liang y Richard Char-Tung.

Löwenheim, Leopold
1915 Über Möglichkeiten im Relativkalkül, *Mathematische Annalen 76*, pp. 447-470; versión inglesa en *van Heijenoort 1967*, pp. 228-251.

Mints, G. E.
1967 Prilozhenie. Teorema Erbrana, *Matematicheskaia teoria logicheskovo vyvoda*, Nauka, Moscú, pp. 311-350.

Myhill, John
Véase Kino, Akiko, John Myhill y Richard Eugene Vesley.

Peano, Giuseppe
1889 *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, Turín; reimpreso en *Peano 1958*, pp. 20-55: versión inglesa en *van Heijenoort 1967*, pp. 83-97.
1894 *Notations de logique mathématique. Introduction au formulaire de mathématique*, Turín.
1895 *Formulaire de mathématiques*, Turín, vol. 1.
1897 ———, vol 2, nº 1.
1898 ———, nº 2.
1899 ———, nº 3.
1901 ———, vol. 3.
1903 ———, vol. 4.
1958 *Opere scelte*, Edizioni cremonese, Roma, vol. 2.

Prawitz, Dag
1965 *Natural Deduction*, Almqvist y Wiksell, Estocolmo, Goteborg y Uppsala.

1970 Ideas and results in proof theory, en *Fenstad 1970*, pp. 235-307.

Quine, Willard Van Orman

1955 A proof procedure for quantification theory. *The Journal of Symbolic Logic 20;* reimpreso en *Quine 1966*, pp. 196-204.

1966 *Selected Logic Papers*, Random House, Nueva York.

Raggio, Andrés R.

1965 Gentzen's Hauptsatz for the Systems NI and NK, *Logique et analyse 8*, pp. 91-100.

Russell, Bertrand

1903 *The Principles of Mathematics*, vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra; 2a. ed., Norton, Nueva York, sin fecha.

Véase Whitehead, Alfred North y Bertrand Russell.

Scanlon, Thomas M.

1973 The consistency of number theory via Herbrand's theorem, *The Journal of Symbolic Logic 38*, pp. 29-58.

Schmidt, Arnold

1951 Die Zulässigkeit der Behandlung mehrsortiger Theorien mittels der üblichen einsortigen Prädikatenlogik, *Mathematische Annalen 123*, pp. 187-200.

Skolem, Thoralf

1928 Über die mathematische Logik, *Norsk matematisk tidsskrift 10*, pp. 125-142; versión inglesa en *van Heijenoort 1967*, pp. 508-524.

Smullyan, Raymond M.

1968 *First-order Logic*, Springer, Nueva York.

Takeuti, Gaisi

1953 On a Generalized Logic Calculus, *Japonese Journal of Mathematics 23*, pp. 39-96; errata, *ibid. 24* (1954), pp. 149-156.

Tarski, Alfred

1936 Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, *Studia philosophica 1*, pp. 261-405; versión inglesa en *Tarski 1956*, pp. 152-278.

1956 *Logic, Semantics, Metamathematics*, Clarendon Press, Oxford.

van Heijenoort, Jean

1967 *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.

1970 Reseña de *Mints 1967*, *The Journal of Symbolic Logic 35*, pp. 323-325.

1971 Reseñas de varios artículos por G. E. Mints, *The Journal of Symbolic Logic 36*, pp. 524-528; en la página 524, antes de la última fórmula desplegada, insértese '(1)'.

Vesley, Richard Eugene

Véase Kino, Akiko, John Myhill y Richard Eugene Vesley.

Whitehead, Alfred North y Bertrand Russell.

1910 *Principia Mathematica,* Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra.

1912 ———, vol. 2

1913 ———, vol. 3.

1925 ———, 2a. ed., vol. 1.

1927 ———, vol. 2.

1927a ———, vol. 3.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN 7

CAPÍTULO PRIMERO: El método axiomático 11

CAPÍTULO SEGUNDO: Herbrand 17

CAPÍTULO TERCERO: Gentzen 29

CAPÍTULO CUARTO: Deducción Natural 39

CONCLUSIÓN 49

REFERENCIAS 51

El Desarrollo de la Teoría de la Cuantificación, editado por la Dirección General de Publicaciones, se terminó de imprimir en los talleres de Editorial Galache, S. A., Privada Dr. Márquez 81, México 7, D.F., el día 5 de enero de 1976.
Se tiraron 2 000 ejemplares.